中学3年 数学／証明

証明問題ドリル　全5問

式による証明・円周角と相似・直角三角形の相似・四角形の性質・中点連結。解答は記述式で、根拠を必ず書くこと。

名前	日付　　／	得点　　／100

問 1　式による証明・因数分解　20点

連続する2つの奇数がある。大きいほうの平方から小さいほうの平方をひいた差は、**8の倍数**になる。このことを証明しなさい。

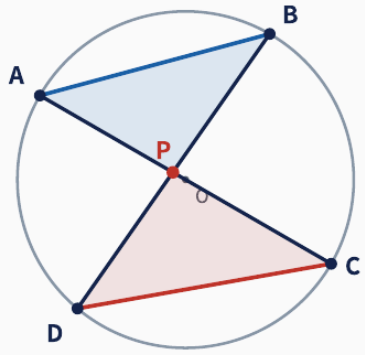
※「nを整数とすると」から書き始めること。

証明

（証明終わり）

問 2　円周角の定理・相似　20点

右の図のように、円Oの円周上に4点A、B、C、Dがこの順にある。弦ACと弦BDの交点をPとするとき、△**PAB** ∽ △**PDC** であることを証明しなさい。



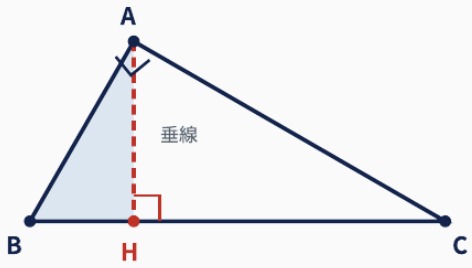
4点A·B·C·Dはこの順

証明

（証明終わり）

問 3　直角三角形の相似・三平方への橋渡し　20点

右の図のように、∠A＝90°の直角三角形ABCがある。頂点Aから辺BCに垂線をひき、辺BCとの交点をHとする。このとき、次の問いに答えなさい。



AH ⊥ BC

(1)　△ABC ∽ △HBA であることを証明しなさい。

証明

（証明終わり）

(2)　(1)を使って、$AB^2 = BH \times BC$ であることを証明しなさい。

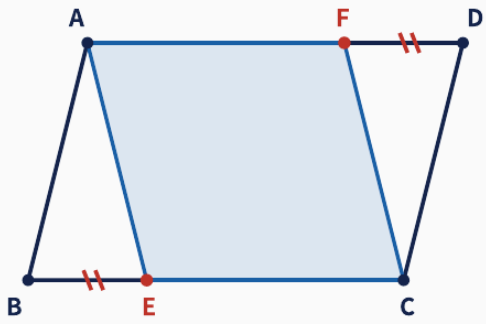
証明

（証明終わり）

ヒント　(2)は、相似な図形では「対応する辺の比が等しい」ことを式にするところから始めます。どの辺とどの辺が対応しているかを、(1)で書いた相似の式の並び順で確認すること。

問 4　平行四辺形になる条件　20点

右の図のように、平行四辺形ABCDの辺BC上に点E、辺AD上に点Fを、**BE ＝ DF** となるようにとる。このとき、四角形AECFは平行四辺形になる。このことを証明しなさい。



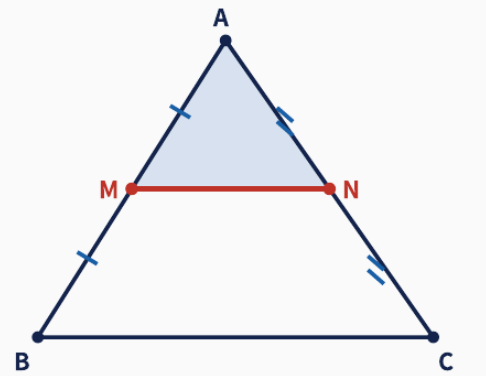
赤の印は長さが等しい

証明

（証明終わり）

問 5　相似比・中点連結　20点

右の図のように、△ABCの辺AB、辺ACの中点をそれぞれM、Nとする。**相似を使って**、MN // BC であり、かつ MN ＝ ½BC であることを証明しなさい。



M·Nはそれぞれの中点

証明

（証明終わり）

問 1　式による証明

nを整数とし、連続する2つの奇数を **2n＋1**、**2n＋3** と表す。

$(2n+3)^2-(2n+1)^2$

$=\{(2n+3)+(2n+1)\}\{(2n+3)-(2n+1)\}$　…和と差の積に因数分解

$=(4n+4)\times 2$

$=\mathbf{8(n+1)}$

n＋1は整数だから、8(n＋1)は8の倍数である。

よって、連続する2つの奇数の平方の差は8の倍数になる。（証明終わり）

減点ポイント　「奇数を2n＋1とおく」と書いても、**nが整数であること**を明記しないと不十分。最後も「8×（整数）の形になった」と言い切ること。

問 2　円周角の定理・相似

△PAB と △PDC において、

弧BCに対する円周角は等しいから

∠PAB ＝ ∠CAB ＝ ∠BDC ＝ ∠PDC　……①

対頂角は等しいから

∠APB ＝ ∠DPC　……②

①、②より、2組の角がそれぞれ等しいから

△PAB ∽ △PDC（証明終わり）

別解　弧ADに対する円周角 ∠ABD ＝ ∠ACD（＝∠PBA ＝ ∠PCD）を①に使ってもよい。どちらの弧を見るかだけの違い。**「どの弧に対する円周角か」を必ず書く**のが採点上の要。

問 3 (1)　直角三角形の相似

△ABC と △HBA において、

仮定より　∠BAC ＝ ∠BHA ＝ 90°　……①

∠Bは共通だから　∠ABC ＝ ∠HBA　……②

①、②より、2組の角がそれぞれ等しいから

△ABC ∽ △HBA（証明終わり）

問 3 (2)　相似 → 線分の積

(1)より △ABC ∽ △HBA だから、対応する辺の比は等しく

AB : HB ＝ BC : BA

比の性質（内項の積＝外項の積）より

AB × BA ＝ HB × BC

したがって　$AB^2 = BH \times BC$（証明終わり）

つながり　同じやり方で △ABC ∽ △HAC から $AC^2 = CH \times CB$ も示せる。2式を足すと $AB^2+AC^2 = BC(BH+CH) = BC^2$ となり、**三平方の定理の証明**そのものになる。

問 4　平行四辺形になる条件

四角形ABCDは平行四辺形だから　AD ∥ BC

点Fは辺AD上、点Eは辺BC上にあるから

AF ∥ EC　……①

また、平行四辺形の向かい合う辺は等しいから　AD ＝ BC

仮定より　DF ＝ BE　であるから

AF ＝ AD − DF ＝ BC − BE ＝ EC　……②

①、②より、1組の対辺が平行でその長さが等しいから

四角形AECFは平行四辺形である。（証明終わり）

減点ポイント　①だけ、②だけでは平行四辺形と言えない。**「1組の対辺が平行でその長さが等しい」という条件名**を最後に必ず書くこと。

問 5　相似比・中点連結

△AMN と △ABC において、

M、Nはそれぞれ辺AB、ACの中点だから

AM : AB ＝ 1 : 2、　AN : AC ＝ 1 : 2　……①

∠Aは共通　……②

①、②より、2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから

△AMN ∽ △ABC（相似比 1 : 2）

相似比が1 : 2だから　MN : BC ＝ 1 : 2、よって　**MN ＝ ½BC**

また、相似な図形の対応する角は等しいから　∠AMN ＝ ∠ABC

同位角が等しいから　**MN // BC**

（証明終わり）

注意　平行の根拠は**同位角**。「相似だから平行」とは言えないので、∠AMN＝∠ABC を経由する一手を省かないこと。

証明の答案で点を落とさない3か条

1. **書き出し**　「△○○○ と △△△△ において、」から始める。対応する頂点の順に並べて書く（これがそのまま辺の比の順になる）。
2. **根拠を毎回書く**　「仮定より」「共通だから」「対頂角は等しいから」「弧○○に対する円周角は等しいから」。等式だけ並べた答案は大きく減点される。
3. **条件名で締める**　「2組の角がそれぞれ等しいから」「2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しいから」「1組の対辺が平行でその長さが等しいから」――結論の直前に条件の名前を書く。