二次方程式 完全攻略ガイド

中学3年 数学 — これだけ読めば全パターン解ける！

もくじ

1. 二次方程式ってなに？
2. パターン① $x^2=a$（平方根でドン！）
3. パターン② $(x+a)^2=b$（カタマリで平方根）
4. パターン③ 因数分解で解く
5. パターン④ 解の公式（最終兵器）
6. パターン⑤ 分数・小数は整数に変身させる
7. パターン⑥ 展開→整理→解く
8. 応用：解から係数を求める
9. 解き方フローチャート（迷ったらこれ！）

1 二次方程式ってなに？

ポイント

x の2乗（x^2）が入っている方程式 = 二次方程式

例: $x^2+3x-10=0$ ← x^2があるから二次方程式！

一次方程式との違い：

	一次方程式	二次方程式
最高次数	x の1乗	x の2乗
例	$2x+3=0$	$x^2+2x+3=0$
解の数	**1つ**	**ふつう2つ**（1つの時もある）

超重要！

二次方程式の解は**基本2つ**ある！ ± を忘れるのが最大のミス！

2 パターン① $x^2=a$（平方根でドン！）

やり方

$x^2=a$ の形にする → **$x=\pm\sqrt{a}$** と答えるだけ！

例題: $x^2=49$

1. もう$x^2=a$の形になってる！
2. 平方根を取る: $x = \pm\sqrt{49}$
3. $\sqrt{49}=7$ だから **$x = \pm 7$**

例題: $3x^2=108$

1. 両辺を3で割る: $x^2=36$
2. 平方根を取る: **$x = \pm 6$**

例題: $6x^2-48=0$

1. 移項: $6x^2=48$
2. 両辺を6で割る: $x^2=8$
3. $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ だから **$x = \pm 2\sqrt{2}$**

コツ

$\sqrt{}$ の中を簡単にするのを忘れずに！

$\sqrt{8}=\sqrt{(4\times 2)}=2\sqrt{2}$、$\sqrt{12}=\sqrt{(4\times 3)}=2\sqrt{3}$、$\sqrt{18}=\sqrt{(9\times 2)}=3\sqrt{2}$

3 パターン② $(x+a)^2=b$

やり方

カタマリごと平方根を取る！

$(x+a)^2=b \rightarrow x+a=\pm\sqrt{b} \rightarrow x=-a\pm\sqrt{b}$

例題: $(x-2)^2=9$

1. カタマリ$(x-2)$ごと平方根: $x-2=\pm3$
2. $x=2\pm3$
3. $x=2+3=\mathbf{5}$ または $x=2-3=\mathbf{-1}$

$x=5,\ -1$

例題: $(x+4)^2-12=0$

1. 移項: $(x+4)^2=12$
2. 平方根: $x+4=\pm\sqrt{12}=\pm2\sqrt{3}$
3. **$x=-4\pm2\sqrt{3}$**

例題: $(3t-1)^2=100$

1. 平方根: $3t-1=\pm10$
2. $3t-1=10$ のとき $3t=11 \rightarrow t=11/3$
3. $3t-1=-10$ のとき $3t=-9 \rightarrow t=-3$

$t=11/3,\ -3$

注意！

$(\ )^2=0$ のときは解が**1つだけ**（重解という）

例: $(x-7)^2=0 \rightarrow x=7$ のみ

4 パターン③ 因数分解で解く

大原則

A × B = 0 なら A=0 または B=0

だから「右辺を0にして、左辺を因数分解」すればOK！

パターン③-A: 共通因数でくくる

例題: $x^2-4x=0$

1. xでくくる: $x(x-4)=0$
2. $x=0$ または $x-4=0$

$x = 0, 4$

パターン③-B: たして○、かけて△

$x^2+bx+c=0$ の因数分解

たしてb、かけてc になる2つの数 p, q を見つける！

→ $(x+p)(x+q)=0$

例題: $x^2-7x+6=0$

1. たして-7、かけて6 になる2数は？
2. **-1** と **-6**（たすと-7、かけると6）
3. $(x-1)(x-6)=0$

$x = 1, 6$

例題: $x^2+x-20=0$

1. たして1、かけて-20 になる2数は？
2. **5** と **-4**（たすと1、かけると-20）
3. $(x+5)(x-4)=0$

$x = -5, 4$

2数の見つけ方

かけ算の方から考える！

例: かけて -20 → $(1,-20)(2,-10)(4,-5)$... のうち、たして1になるペアを探す
→ 5と -4 が見つかる！

パターン③-C: 完全平方式（重解）

例題: $x^2+10x+25=0$

1. $25=5^2$、$10=2\times5$ だから完全平方！
2. $(x+5)^2 = 0$

$x = -5$（重解）

完全平方の見分け方

$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$

「定数項が何かの2乗」かつ「xの係数がその数の2倍」なら完全平方！

5 パターン④ 解の公式（最終兵器）

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ のとき}$$

$$x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) \div 2a$$

これだけは暗記！
因数分解できない時の**最終兵器**。この公式さえあれば、どんな二次方程式でも解ける！

例題: $2x^2-4x+1=0$

1. $a=2, b=-4, c=1$ を確認
2. $b^2-4ac = (-4)^2-4\times2\times1 = 16-8 = \mathbf{8}$
3. $x = (4 \pm \sqrt{8}) \div 4 = (4 \pm 2\sqrt{2}) \div 4$
4. 約分: $\mathbf{x = (2 \pm \sqrt{2}) / 2}$

例題: $3x^2-2x-8=0$

1. $a=3, b=-2, c=-8$
2. $b^2-4ac = 4-4\times3\times(-8) = 4+96 = \mathbf{100}$
3. $x = (2 \pm \sqrt{100}) \div 6 = (2 \pm 10) \div 6$
4. $x = 12/6=\mathbf{2}$ または $x = -8/6=\mathbf{-4/3}$

$\mathbf{x = 2, -4/3}$

解の公式 あるある失敗
失敗① b がマイナスの時、−b を忘れる（−(−4)=+4 だよ！）
失敗② 4ac の計算で c のマイナスを見落とす
失敗③ 最後の約分を忘れる

たすき掛け（係数が大きい因数分解）

$ax^2+bx+c=0$ で $a\neq1$ のとき
解の公式でもいいけど、**たすき掛け**で因数分解できると速い！

例題: $6x^2-13x+6=0$

1. $6=2\times3$、$6=2\times3$ で試す:

   2　3 → $3\times3=9$

   3　2 → $2\times2=4$

   たすと $9+4=13$ → ピッタリ！（符号調整して -13）

2. $(2x-3)(3x-2)=0$

$x=3/2,\ 2/3$

6 パターン⑤ 分数・小数 → 整数に変身！

鉄則

分数 → 分母の最小公倍数を両辺にかける

小数 → 10 や 100 を両辺にかける

整数だけの式にしてから解く！

例題: $\frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{3}{8} = 0$

1. 分母は 12, 8, 8 → 最小公倍数は **24**
2. 全体に×24: $2x^2 - 3x - 9 = 0$
3. たすき掛け: $(2x+3)(x-3) = 0$

$x = -\frac{3}{2}, 3$

例題: $0.2x^2 - 0.5x - 1.2 = 0$

1. 全体に×**10**: $2x^2 - 5x - 12 = 0$
2. たすき掛け: $(2x+3)(x-4) = 0$

$x = -\frac{3}{2}, 4$

7 パターン⑥ 展開→整理→解く

手順

①展開する → ②右辺を0にまとめる → ③パターン①〜⑤のどれかで解く

例題: $x(x-9) = -18$

1. 展開: $x^2 - 9x = -18$
2. 右辺を0に: $x^2 - 9x + 18 = 0$
3. たして−9、かけて18 → -3 と -6
4. $(x-3)(x-6) = 0$

$x = 3, 6$

例題: $(x+1)^2 = 3(x-1)^2$

1. 左辺展開: x^2+2x+1
2. 右辺展開: $3(x^2-2x+1) = 3x^2-6x+3$
3. 右辺を移項: $x^2+2x+1 - 3x^2+6x-3 = 0$
4. 整理: $-2x^2+8x-2 = 0 \rightarrow x^2-4x+1 = 0$
5. 解の公式: $x = 2 \pm \sqrt{3}$

例題: $(x^2-2)/2 - (x^2-5x)/3 = 3$

1. 分母をはらう（×6）: $3(x^2-2) - 2(x^2-5x) = 18$
2. 展開: $3x^2-6 - 2x^2+10x = 18$
3. 整理: $x^2+10x-24 = 0$
4. $(x+12)(x-2) = 0$

$x = -12, 2$

8 応用: 解から係数を求める

タイプA: 1つの解が与えられている

やり方

与えられた解を代入するだけ！ x に数字を入れれば、m の一次方程式になる。

例題: $4x^2+(m+1)x+2m=0$ の解の1つが -1 のとき、mの値は？

1. $x=-1$ を代入: $4(-1)^2 + (m+1)(-1) + 2m = 0$
2. 計算: $4 - m - 1 + 2m = 0$
3. 整理: $m + 3 = 0$

$m = -3$

タイプB: 2つの解が与えられている

やり方（解と係数の関係）

$x^2+ax+b=0$ の2つの解が α, β のとき：

$\alpha + \beta = -a$（2つの解の和 = $-x$の係数）

$\alpha \times \beta = b$（2つの解の積 = 定数項）

例題: $x^2+ax+b=0$ の解が -2 と 8 のとき、a, b を求めよ

1. 解の和: $-2+8 = 6 = -a \rightarrow \mathbf{a = -6}$
2. 解の積: $(-2)\times 8 = -16 = b \rightarrow \mathbf{b = -16}$

$a = -6, b = -16$

別解（代入法）

解をそれぞれ代入して連立方程式にしてもOK！

$x=-2$: $4-2a+b=0$

$x=8$: $64+8a+b=0$

→ 連立を解いて $a=-6, b=-16$（同じ答え！）

9 解き方フローチャート

「どの方法で解けばいいかわからない！」って時は、この順番で考えよう：

二次方程式が出てきた！

↓

まず右辺を0にする（展開・移項・通分が必要ならやる）

↓

分数や小数がある？

YES → 両辺に分母の最小公倍数（or 10, 100）をかけて整数化！

↓

$x^2=a$ の形？

YES → $x=\pm\sqrt{a}$（パターン①）

↓ NO

$(x+a)^2=b$ の形？

YES → $x=-a\pm\sqrt{b}$（パターン②）

↓ NO

因数分解できる？

YES → AB=0 の形にして解く（パターン③）

たして○、かけて△ / 共通因数 / 完全平方 / たすき掛け

↓ NO / わからない

解の公式！（パターン④）

$x = (-b \pm \sqrt{(b^2-4ac)}) / 2a$

これで必ず解ける！迷ったらこれ！

テストで高得点を取る秘訣

① **± を絶対忘れない**（これだけで失点が激減）

② **√ は必ず簡単にする**（$\sqrt{12} \rightarrow 2\sqrt{3}$）

③ **分数は最後まで約分する**

④ **検算する**（答えを元の式に代入して成り立つか確認）

⑤ **迷ったら解の公式**（時間はかかるけど必ず解ける）

因数分解は「速い道」、解の公式は「確実な道」
両方使えれば最強！